|  |
| --- |
| [Рекуррентные соотношения. Метод рекуррентных соотношений.](http://naotlichno.by/kombinatorika/13-rekurrentnye-sootnosheniya-metod-rekurrentnyx-sootnoshenij.html) |

|  |
| --- |
| В предыдущей статье, мы рассмотрели [основные формулы комбинаторики](http://naotlichno.by/kombinatorika/8-kombinatorika-v-formulax.html). Были затронуты два логических правила: [правило суммы и правило произведения](http://naotlichno.by/kombinatorika/8-kombinatorika-v-formulax.html#logich-prav), [биномиальная теорема(бином Ньютона)](http://naotlichno.by/kombinatorika/8-kombinatorika-v-formulax.html#binom-newtona), [полиномиальная теорема](http://naotlichno.by/kombinatorika/8-kombinatorika-v-formulax.html#polinom-teorema) и [разбиение множеств](http://naotlichno.by/kombinatorika/8-kombinatorika-v-formulax.html#razbienie-mojestv). Теперь приступим к рассмотрению более интересного раздела дискретной математики - это рекуррентные соотношения. **Рекуррентное соотношение** - это соотношение(равенство, система равентсв) позволяющее свести решение комбинационной задачи для некоторого числа предметов к аналогичной задаче с меньшей размерностью.  Решение комбинационных задач с помощью рекуррентных соотношений - это **метод рекуррентных соотношений**.  **Рекуррентное соотношение**       Пример 1: На плоскости нарисовано n - прямых, причем все прямые попарно не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. На сколько полуплоскостей они разобьют нашу плоскость?  Решение: Рассмотрим пару тривиальных случая и пусть функция f(n) равняется количеству полуплоскостей образованных n - прямыми. Рассмотрим сначала тривиальные случаи:  1)  n = 0  =>  f(0) = 1  2) n = 1  =>  f(1) = 2  3) n = 2  =>  f(2) = 4  Теперь пусть на плоскости n прямых и мы проводим (n + 1) - прямую. Получим, что после проведения нашей (n + 1) - прямой общая численность полуплоскостей увеличиться на (n + 1) - полуплоскость. Отсюда получаем:  f(n + 1) = f(n) + n + 1 , n \geq 0  =>  f(n + 1) - f(n) = n + 1  при n = 0 , f(1) - f(0) = 1  при n = 1 , f(2) - f(1) = 2  при n = n , f(n) - f(n - 1) = n  Выражаем сначала f(n - 1)через f(n - 2)и получаем f(n - 1) = f(n - 2) + n - 1 и подставляем полученное равенство в последнее уравнение и получаем  f(n) = f(n - 2) + n + n - 1  Теперь выражаем f(n - 2) через  f(n - 3)и т. д. В итоге получим следующее равенство  f(n) = n + (n - 1) + (n - 2) + . . . + 1 + f(0) = \frac{n(n+1)}{2} + 1       Пусть  f_{n} = f(n) - решение комбинаторной задачи для n - предметов и для этой задачи известно рекуррентное соотношение вида  f_{n + k} = F(f_{n} , f_{n + 1} , . . . , f_{n + k + 1})          (1)  F(y_{1} , y_{2} , . . . , y_{k})- некоторая функция k - переменных. (1) - рекуррентное соотношение k - го порядка. Последовательность чисел  {x}^{\infty}_{n+1} - решение (1), если при подстановке f_{n}=x_{n} в (1) получается верное равенство.       Если первые k элементов f_{1} , f_{2} , . . . , f_{k}рекуррентного соотношения (1) заданы произвольно(т.е. между ними нет соотношений), то (1) имеет бесконечно много решений. Если же первые k элементов определены однозначно, то все остальные элементы определяются однозначно.       Определение 1: Пусть f_{n}- **общее решение** (1), если оно зависит от k прозвольных постоянных, т.е. f_{n} = f_{n}(C_{1}, C_{2} , . . . , C_{k} , n). И для любого решения x_{n}существуют такие постоянные значения {C}'_{1} , {C}'_{2} , . . . , {C}'_{k}, что x_{n} = f_{n}({C}'_{1} , {C}'_{2} , . . . , {C}'_{k} , n).  **Характеристическое уравнение**       Определение 2: Линейным однородным рекуррентным соотношением второго порядка с постоянными коэффициентами называется рекуррентное соотношение вида:  f_{n+2} = a_{1}f_{n+1} + a_{2}f_{n} , n=1,2,...          (2)  a_{1} , a_{2} - нейкие коэффициенты, причем a_{2}отлично от нуля. Уравнение вида  \lambda^{2} = a_{1}\lambda + a_{2}- **характеристическое уравнение** рекуррентного соотношения (2).       Теорема 1: Если характеристическое уравнение рекуррентного соотношения (2) имеет два различных корня \lambda_{1} \neq \lambda_{2}, то общее решение рекуррентного соотношения (2) имеет вид  f_{n} = C_{1}\lambda_{1}^{n-1} + C_{2}\lambda_{2}^{n-1}  Если рекуррентное соотношение имеет два равных корня \lambda_{1} = \lambda_{2}, то общее решение рекуррентного соотношения (2) имеет следующий вид  f_{n} = (C_{1} + C_{2})\lambda^{n-1} , n=1,2,...       Утверждение 1: Пусть последовательности g_{n}и h_{n} , n=1,2,...являются решениями рекуррентного соотношения (2), тогда для {tex} \forall A,B{tex}  f_{n} = Ag_{n} + Bh_{n} , n=1,2,...является решением [рекуррентного соотношения](http://naotlichno.by/kombinatorika/13-rekurrentnye-sootnosheniya-metod-rekurrentnyx-sootnoshenij.html" \l "2) [(2)](http://naotlichno.by/kombinatorika/13-rekurrentnye-sootnosheniya-metod-rekurrentnyx-sootnoshenij.html#2).       Утверждение 2: Если \lambda_{1}корень характеристического уравнения рекуррентного соотношения (2), то последовательность 1, \lambda_{1}, \lambda_{1}^{2}, . . . ,\lambda_{1}^{n-1}, . . .является решением [рекуррентного соотношения (2)](http://naotlichno.by/kombinatorika/13-rekurrentnye-sootnosheniya-metod-rekurrentnyx-sootnoshenij.html#2).       Определение 3: Линейным рекуррентным соотношением k - го порядка(k - фиксировано) с постоянными коэффициентами называется рекуррентное соотношение следующего вида:  f_{n+k} = a_{1}f_{n+k-1} + a_{2}f_{n+k-2} + . . . + a_{k-1}f_{n+1} + a_{k}f_{n}          (3)  n=1,2,... ; a_{1}, . . . , a_{k} - постоянные  k \epsilon \mathbb{N} .  Характеристическим уравнением рекуррентного соотношения (3) является уравнение вида  \lambda^{k} = a_{1}\lambda^{k-1} + a_{2}\lambda^{k-2} + . . . + a_{k-1}\lambda^{1} a_{k}       Теорема 2: Пусть \lambda_{1}, \lambda_{2}, . . . , \lambda_{p}- все попарно различные корни характеристического уравнения рекурретного соотношения (3) m_{i} - кратность корня  \lambda_{i} ,  i=1,2,...,p (m_{1} + m_{2} + . . . + m_{p} = k). Тогда общее решение рекуррентного соотношения (3) имеет следующий вид:  n=1,2,... .  В частности, если p=k, то  f_{n} = C_{1}\lambda_{1}^{n-1} + C_{2}\lambda_{2}^{n-1} + . . . + C_{k}\lambda_{k}^{n-1} , n=1,2,...       Из этой статьи Вы узнали следующее:   * **рекуррентные соотношения**, **рекуррентные соотношения** 2-го порядка и k-го порядка * **характеристическое уравнение** рекуррентного соотношения * методы нахождения **общего решения** рекуррентного соотношения |